初歩からわかる

数学的ロジカルシンキング

使うのは
中学の数学
だけ！

永野数学塾（大人の数学塾）塾長
永野裕之 著

SCC

目　次

第3章

ツールとしての数学的ロジカルシンキング

3.1 地球外文明の数を見積もる【フェルミ推定】

本書はこれまで、「数学的ロジカルシンキング」を3つのテーマに分けて、コミュニケーションに役立つもの（第1章）、問題解決に役立つもの（第2章）を紹介してきました。最終章の本章ではロジカルシンキングを助けてくれるツールを紹介していきたいと思います。

そのトップバッターは**フェルミ推定**。

フェルミ推定というのは、簡単に言ってしまえば**「だいたいの値」を見積もる手法**のことです。

理数系の人間にとって「だいたいの値」を見積もることはとても大切です。例えばある実験の結果に対して「およそこれくらいの値になるだろう」という予想が立てば、その実験に必要な精度がわかります。また予想した「だいたいの値」と著しく桁の違う値が得られた場合は「あり得ない＝実験方法に不備がある」と判断できたり、あるいは仮説の段階では思いもつかなかった新事実の発見に繋がったりします。これが有益であることはいうまでもありません。

しかし少なくとも私が学生だった15～20年前は「フェルミ推定」という言葉はありませんでした。「フェルミ推定」という言葉は、2004年に出版されたスティーヴン・ウェッブ著『広い宇宙に地球人しか見当たらない50の理由―フェルミのパラドックス』（青土社）の中で初めて使われたといわれています。

近年では、GoogleやMicrosoftといった企業が入社試験に**「東京にはマンホールがいくつあるか？」**のような概数を見積もらせる問題を頻繁に出していることもあり、理数系の研究室や工場だけでなく、ビジネスシーンでもフェルミ推定は重宝されるようになってきました。

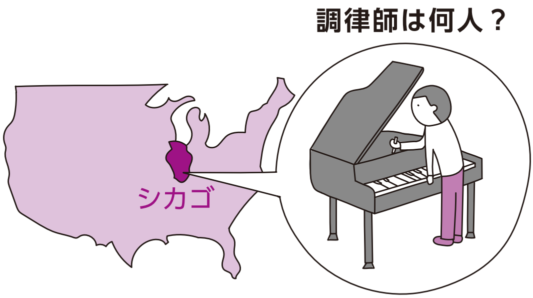
フェルミ推定とは

フェルミ推定の名前の由来になったのは、「原子力の父」として知られるアメリカのノーベル賞物理学者**エンリコ・フェルミ**（1901-1954）です。

理論物理学者としても実験物理学者としても目覚ましい業績を残したフェルミは、「だいたいの値」を見積もる達人でもありました。爆弾が爆発した際、ティッシュペーパーを落とし、爆風に舞うティッシュの軌道から爆弾に使われた火薬の量を概算で弾き出したこともあったとか。

そんなフェルミがシカゴ大学で行った講義の中で学生に出した次の問題は大変有名です。

「シカゴにはピアノ調律師が何人いるか？」



（図 3.1）

フェルミが物理学科の学生に対してこのような問題を出したのは、物理の世界で生きていくのならこのような推定ができる能力は非常に重要である、というメッセージだったのでしょう。

ただしここでの**目的は、正確な値（本当の人数）を出すことではありません。**シカゴのピアノ調律師の人数を正確に把握したいのなら「シカゴピアノ調律師協会（という組織があるかどうかは知りませんが…）」的なところに電話で確認すればすんでしまいます。

大切なのは、このような問題に対して「わかるわけがない」と匙（さじ）を投げるのではなく、既に自分が持っているデータを使って論理的に「だいたいの値」が求められるかどうかです。

では、順を追ってやってみましょう。

（1）仮説

「シカゴにおいてはピアノ調律師の需要と供給のバランスが取れている」という仮説を立てて、以下「シカゴにあるすべてのピアノを調律するために必要な調律師の人数」を考えることにします。

（2）問題の分解

この問題を考えるために必要なデータと推定量は次の通り。

・人口
・1 世帯あたりの人数
・ピアノを持っている世帯の割合
・ピアノ 1 台あたりの調律の回数（年間）
・調律師 1 人あたりの調律の回数（年間）

（3）データ―人口

シカゴのピアノ調律師が何人いるかを見積もるために必要なデータは、シカゴの人口です。**シカゴの人口はおよそ 300 万人**（私たちにとっては馴染みが薄いかもしれませんが、シカゴに住む学生にとっては“常識”でしょう）。

（4）推定量の決定

推定量①―1 世帯あたりの人数

人口 300 万人の街に世帯はどれくらいあるでしょうか？　もちろん 1 人の世帯も 4 人の世帯も 10 人の世帯もあると思いますが、平均して **1 世帯の人数は 3 人**ということにします。

推定量②―ピアノを持っている世帯の割合

さて、このうちピアノがある世帯はどれくらいあるでしょうか？　日本とアメリカでは事情が違うでしょうが、小学校のとき「ピアノを習っている」子供はクラスに何人くらいいたかを考えてみましょう。共学の場合、40 人のクラスならピアノを習っているのは 4 ～ 5 人というケースが多いのではないでしょうか？　（ちなみに私は男子校だったので、ピアノを習っている

のはクラスに１～２人でした）。そこで**ピアノを持っている世帯は全世帯の10%**ということにします。中学から高校になるとピアノをやめてしまう人は少なくありませんし、誰も弾かないピアノは除外すべきなので、少し多めですが、家庭以外にも学校や公民館、ホールなどにもピアノはありますから、だいたいこの程度でしょう。

推定量③―ピアノ１台あたりの調律の回数（年間）

ピアノは普通**１年に１回**は調律が必要です。

推定量④―調律師１人あたりの調律の回数（年間）

１人の調律師が１年で調律できる台数を考えます。何台くらいだと思いますか？　ピアノの調律というのは重労働でとても時間がかかります。どんなに頑張っても**１日に３台**が限度でしょう。また、調律師は週休２日で**年間250日**稼働すると考えます。

3［台/日］×250［日］＝750［台］

より、１年で１人の調律師が調律できるピアノ台数は**約750台**です。

（５）総合

以上をふまえてシカゴのピアノ調律師の数を推定していきます。

・世帯数：

300［万人］÷3［人/世帯］＝100［万世帯］

・ピアノの台数：

100［万世帯］×10%＝10［万台］

・必要な調律の回数（年間）：

10［万台］×1［回/台］＝10［万回］

・必要な調律師の数（年間）：

10［万回］÷750［回/人］＝133.3…人

より、**シカゴのピアノ調律師の数は約133人**と推定されます。

フェルミ推定の手順をフローチャートにまとめておきましょう。

【フェルミ推定の手順】

① 仮説を立てる

↓

② 問題をいくつかの要素に分解する

↓

③ 既知のデータを活用する

↓

④ 各要素の推定量を決定（算出）する

↓

⑤ 総合する

（図 3.2）

なお、④**「各要素の推定量を決定（算出）する」**では、第 1 章のプレゼン力をあげる数字の使い方のところ（62 ページ）でも紹介した**「単位量あたりの量」と、「割合」が重要**です。

シカゴにいる調律師の人数を推定する際にも

《単位量あたりの量》

・1 世帯あたりの人数→ 3 人

・ピアノ 1 台あたりの調律の回数（年間）→ 1 回

・調律師 1 人あたりの調律の回数（年間）→ 750 回

《割合》

・ピアノを持っている世帯の割合→ 10%

などを使いましたね。

【推定量を決定（算出）するときのポイント】
・単位量あたりの量
・割合

入社試験などでフェルミ推定の問題が出されるとき面接官が見ているのは**「仮説を立てる→問題をいくつかの要素に分解する→既知のデータを活用する→各要素の推定量を決定（算出）する→総合する」というプロセスを踏めるかどうかです。**そういう論理的な思考ができるかどうかを見ています。

逆に言えば、問題を分解したあと要素のどれかについてデータや推定の誤りがあって結果が間違っていたとしても、そのことによって評価が下がることはありません。

注記　この節で私が示すフェルミ推定もこれが絶対的な「正解」というわけではなく、あくまで「解答例」です。

【入社試験におけるフェルミ推定のポイント】
仮説→ 分解→ データ→ 推定量→ 総合
のプロセスを論理的に構築できるかどうか
（結果の正しさは問われない）

フェルミ推定の最後にすべきこと

入社試験などにおいては、各要素の推定を総合して最終的な推定値を出すところで終わると思いますが、本当はこれで終わりではありません。本来は最後に**「実際の数値と比べてどうであったか？」を検証する**必要があります。

これについてフェルミは非常に含蓄のある言葉を残しています。

「実験には 2 つの結果がある。もし結果が仮説を確認したなら、君は何かを計測したことになる。もし結果が仮説に反していたら、君は何かを発見したことになる。」

フェルミ推定によって得られる値は、あくまで仮説から論理的に導かれる推定値です。これに対して科学における実験結果は「本当の値」です。この両者を比べたとき、2 つが一致するならば仮説の正しさを確認することができます。一方、大きく違うようなら仮説そのものが間違っていた可能性が高いでしょう。

シカゴの調律師の例でいえば、推定値は 133 人でしたが、もし実際の人数がこれよりも著しく多いのならば、需要よりも供給が上回っている可能性が高いと考えることができます。そこから生活が苦しい調律師の実態や、調律師業界全体をコントロールする組織の必要性なども見えてくるはずです。

地球外文明の数を推定する（ドレイクの方程式）

フェルミは、宇宙の年齢（宇宙の始まりから現在までの時間）や広さ、星の数などから地球外文明の数を推定し、宇宙人は存在すると結論しました。そしてそのうちのいくつかは地球に到達しているべきだと考えました。しかし実際には宇宙人の存在が確認されていないことを不思議に思ったフェルミはしばしば同僚に

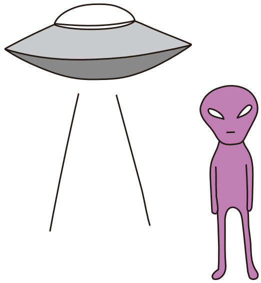
「いったい彼らはどこにいるんだろうね？」

とこぼしていたとか。

地球外文明が存在する可能性は高いのに、そのような文明との接触記録が皆無であるという矛盾は、**「フェルミのパラドックス」**と呼ばれます。

フェルミと同じように地球外文明の数を見積もった推定としては、1961 年にアメリカの天文学者フランク・ドレイクが発表した**「ドレイクの方程式」**が有名です。

どこにいるのか？



（図 3.3）

ドレイクは私たちの銀河系にどのくらいの宇宙人が分布しているのかを見積もるために、次のような方程式が成立するという仮説を立てました。**N は銀河系に存在する通信可能な地球外文明の数**を表しています。

$$N = R \times f_p \times n_e \times f_l \times f_i \times f_c \times L$$

各変数の意味は次の通り。

R：銀河系の中で 1 年間に誕生する恒星の数
f_p：惑星系を持っている恒星の割合
n_e：恒星ひとつあたりの生命が存在できる惑星の数
f_l：生命が存在できる惑星のうち実際に生命が誕生する惑星の割合
f_i：知的生命体にまで進化する生命の割合
f_c：星間交信力を持ち、実行する知的生命体の割合
L：ひとつの知的生命体の文明が星間交信力を持つ期間

ドレイクは問題をこれらの 7 つの要素に分解しました。このうちデータは R だけです。あとの 6 つの推定量には、それぞれ単位量あたりの量や割合が使われているのがわかるでしょう。

ドレイクは「銀河系の中で毎年誕生する恒星の数」というデータから出発し、推定に必要な要素は f_p, n_e, f_l, f_i, f_c, L の 6 つであると考えたわけです。

ちなみに 1961 年当時ドレイクが考えた値は次の通りです。

$R = 10$［個 / 年］（年平均 10 個の恒星が誕生する）

$f_p = 0.5$（恒星のうち半数が惑星を持つ）

$n_e = 2$（惑星を持つ恒星は、生命が誕生可能な惑星を 2 つ持つ）

$f_l = 1$（生命が誕生可能な惑星では、100%生命が誕生する）

$f_i = 0.01$（生命が誕生した惑星の 1%で知的文明が獲得される）

$f_c = 0.01$（知的文明を有する惑星の 1%が通信可能となる）

$L = 10{,}000$［年］（通信可能な文明は 1 万年間存続する）

これらの値を代入すると

$$\mathbf{N = 10 \times 0.5 \times 2 \times 1 \times 0.01 \times 0.01 \times 10{,}000 = 10}$$

つまり、**銀河系には通信可能な文明が 10 個は存在する**ことになります。

6 つの推定量には他の値を考えることもできますが、ドレイクの方程式が興味深いのは、これらに異なる推定値を使っても多くの場合、N は 1 よりずっと大きくなるということです。実際この「ドレイクの方程式」は当時、地球外知的生命体探査を行うための強力な動機づけになりました。

しかしそれから 50 年の月日が流れた今も私たちは宇宙人とのコンタクトには成功していません。フェルミ流にいえば、これは「何かを発見した」ともいえるわけですが、それが何であるかの結論はまだ不明です。「ドレイクの方程式」で地球外文明の数を見積もることができるという仮説そのものが間違っていたか、推定値のどれかが著しく違うか、あるいは単に運が悪いだけか…。アメリカの NASA の動向を見ていると、どうも最後の可能性に賭けているようにも思えますが（私も同じ思いです）、「生命が存在できる惑星のうち実際に生命が誕生する惑星の割合（$f_l = 1$）」と「知的生命体にまで進化する生命の割合（$f_i = 0.01$）」がもっと低い値になるのではないかという意見もあります。

フェルミ推定の練習

フェルミ推定が上達するコツはなんといっても、実際にやってみることですから、いくつか例題をやってみましょう。

例題３－１

東京にマンホールはいくつあるかを推定しなさい。

解答例

65 万個

解　説

（1）仮定

・マンホールの数は上下水道が普及している世帯数に比例する。

（2）問題の分解

推定に必要なデータと推定量は以下の通り。

・東京の人口（データ）

・1 世帯あたりの人数（推定量）

・上下水道の普及率（推定量）

・1 つのマンホールあたりの世帯数（推定量）

（3）データ

・東京の人口は**約 1,300 万人**

（4）推定量の決定

・1 世帯あたりの人数

→都会は 1 人暮らしも多いので 1 世帯あたりの人数は **2 人**

・上下水道の普及率

→ **100%**

・1 つのマンホールあたりの世帯数

→これが一番難しいところですが、住宅地などでは 10 世帯ほどの一軒家が接する路地に 1 つマンホールがあると考えて、**10 世帯**

（5）総合

以上をふまえて東京にあるマンホールの数を推定していきます。

・東京の世帯数：

1,300［万人］÷2［人/世帯］＝650［万世帯］

・上下水道が普及している世帯数：

650［万世帯］×100%＝650［万世帯］

・マンホールの数：

650［万世帯］÷10［世帯/個］＝65万個

よって、**65万個**と推定されます。

ちなみに、東京都下水道局が発行している『東京都の下水道2014』によると、平成25年度末で都内のマンホールの数は484,078個。**約50万個**ですから、上の推定はそう悪くありません。

フェルミ推定における各推定量は当然誤差を含みます。でも**誤差は上にズレたり下にズレたりするので、いくつかの推定量を掛けたり割ったりしているうちにお互いの誤差が相殺されて最終的な推定の結果は本当の値からそう遠くない**、ということがよくあります（^_-）-☆

もう1題やってみましょう。

例題3－2

日本人が1年間に消費するワインの量（KL）を推定しなさい。

解答例

270,000KL

解　説

（1）仮説

・ワインの消費量は飲酒習慣がある人1人あたりのワイン年間消費量に比例する。

（2）問題の分解

推定に必要なデータと推定量は以下の通り。

・日本の人口（データ）

・20 歳以上の割合（推定量）

・飲酒習慣がある人の割合（推定量）

・飲酒習慣がある人 1 人あたりの年間ワイン消費量（推定量）

・ワイン 1 本あたりの容量（データ）

（3）データ

・日本の人口は**約 1 億 2 千万人**

・ワイン 1 本あたりの容量は **750mL**

（4）推定量の決定

・20 歳以上の割合

→（かなり大雑把ですが）**50%**

・飲酒習慣がある人の割合

→飲み会などでお酒がまったく飲めない人はだいたい 1 〜 2 割のことが多いのではないでしょうか？　しかし飲める人が全員普段から飲酒の習慣があるわけではありませんし、飲めない人はそもそも飲み会に不参加、ということも考えられますから **50%**にします。

・飲酒習慣がある人 1 人あたりの年間ワイン消費量

→日本人は欧米人と比べると、まだまだ日常的にワインを飲む人は少ないようです。飲酒習慣がある人でも平均すると月に 1 本というところではないでしょうか。そこで**飲酒習慣がある人 1 人あたりのワイン年間消費量は 12 本**ということにします。

（5）総合

以上をふまえて日本人が 1 年間に消費するワインの量を推定していきます。

・20 歳以上の人口：

12,000［万人］×50%＝6,000［万人］

・飲酒習慣がある人の数：

6,000［万人］×50%＝3,000［万人］

・年間で消費されるワインの本数：

3,000［万人］×12［本 / 人］＝36,000［万本］

・年間で消費されるワインの容量：

36,000［万本］×750［mL/ 本］＝270,000［KL］

よって、**270,000KL（27 万 KL）**と推定されます。

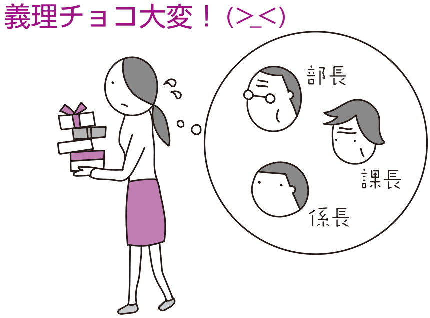
ちなみに、国税庁課税統計によると、平成 24 年度の日本のワイン消費量は **320,785KL** でした。

3.2 義理チョコは必要か？【ゲーム理論】

突然ですが、バレンタインの思い出を少し。

私は男子校に通っていたので、バレンタインといっても学校でチョコレートをもらえる可能性はゼロでした。それなのに当日になると、通学途中に突然女子高生から「受け取ってください（〃∇〃）」って渡されちゃったらなんて言おうかなア…と勝手に妄想を膨らませてはソワソワしていたものです。今思えばアホまるだし。でも男子高校生なんてそんなもんです（笑）。

逆に女子の皆さんの中には、職場などであげたくもない「義理チョコ」を用意する煩わしさに辟易とされている方も少なくないでしょう。多くの女性が煩わしく思っていても、世の中からなかなか義理チョコをあげる慣習がなくならないのはなぜでしょうか？　その理由はこの節で紹介する**ゲーム理論**が教えてくれます。



（図 3.4）

ゲーム理論が扱うのはお遊びの「ゲーム」だけではありません。個人どうしはもちろん、企業間や国家間も含めて、戦略が必要な利害関係のほぼすべてに応用をすることができます。ゲーム理論はそれだけ強力で有効な理論なので、今では欧米のＭＢＡ取得に必須とされ、日本でも多くのビジネスマンが学び、仕事に活用しています。

ゲーム理論とは

ゲーム理論とは、**「複数のプレイヤーが選択するそれぞれの戦略が、当事者や当事者の環境にどのように影響するかを分析する理論」**のことをいいます。平たく言えば、2 人以上のプレイヤーが利害関係にあるとき、どのような結果が生じるかを示し、どのように意思決定するべきかを教えてくれる理論です。

「プレイヤー」は「国家」である場合も、企業や組織である場合も、個人である場合もあります。

ゲーム理論が産声をあげたのは 1926 年。**ジョン・フォン・ノイマン**(1903-1957)というハンガリー生まれの数学者が提唱したのが最初です。

余談ですがノイマンは**「20 世紀のダ・ヴィンチ」**とも称される大天才で、その研究は数学だけでなく、物理学、計算機科学、経済学、気象学、心理学、政治学と非常に多岐にわたりました。現代のコンピュータを「ノイマン型コンピュータ」ということがありますが、これは彼がその動作原理を考案したからです。

ゲーム理論は、最初の発表から随分あとの 1944 年に、ノイマンと経済学者の**オスカー・モルゲンシュテルン**(1902-1977)が著した『**ゲームの理論と経済行動**』という大書(邦訳は 5 分冊)によって初めて体系化されました。この書物には「20 世紀前半における最大の功績のひとつ」「ケインズの一般理論以来、最も重要な経済学の業績」などの賛辞が寄せられ、当時大変な評判になったそうです。

そして、1994 年には初期のゲーム理論の研究に貢献した**ジョン・ナッシュ氏**(1928-2015)、**ラインハルト・ゼルテン氏**(1930-)、**ジョン・ハーサニ氏**(1920-2000)の 3 人にノーベル経済学賞が授与されたことでゲーム理論はその地位を確実なものにしました。

ちなみに、ナッシュ氏は映画『ビューティフル・マインド(2002 年)』のモデルになった数学者です。

ゲーム理論は、誕生からわずか 100 年足らずの歴史の浅い理論であるにも関わらず、今日では**経済学、経営学、政治学、社会学、情報科学、生物学、応用数学**など非常に多くの分野で活用されています。

（図 3.5）

ゲーム理論の基本は、いわゆる**「囚人のジレンマ」**と呼ばれるゲーム構造から学ぶことができます。

囚人のジレンマ

ある大事件の容疑者が２人います。２人は別件の微罪で捕まえられ、それぞれ別々に取り調べを受けています。仮にこの２人を囚人Ａ、囚人Ｂとしましょう。

検察としてはＡ、Ｂの２人が共謀して犯行を行ったと考えているものの物的証拠は多くありません。ここはなんとしても自白を取りたいところです。しかし敵も百戦錬磨。なかなか口を割らない２人に業を煮やした検察は、仕方なく２人と次のような「司法取引（日本では禁止されています）」をすることにしました。

（1）　相手が黙秘し、お前が自白したら、お前は釈放
（2）　相手が自白し、お前が黙秘したら、お前は懲役 10 年
（3）　２人とも黙秘なら、２人は懲役１年（微罪による刑罰のみ）

（4）　２人とも自白なら、２人は懲役５年

なおＡ、Ｂは隔離され、お互いに取り調べ中の相棒の言動を知ることはできない状況にあります。

選択次第で懲役は・・・

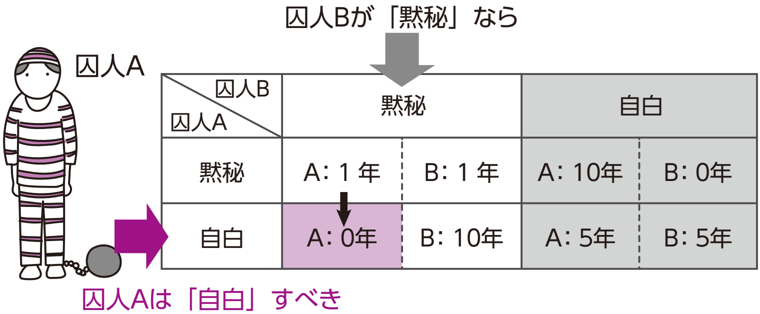
囚人A ＼ 囚人B	黙秘		自白	
黙秘	A: 1 年	B: 1 年	A: 10年	B: 0年
自白	A: 0年	B: 10年	A: 5年	B: 5年

（図 3.6）

司法取引の内容を表にすると上のようになります（このような表を**利得行列**［payoff matrix］といいます）。

囚人 A の立場に立って考えてみましょう。

囚人 B が黙秘する場合、**A は自白した方が得**です（釈放されます）。



（図 3.7）

一方 B が自白する場合も **A は自白した方が得**です（そうでないと自分だけ懲役 10 年になってしまいます）。

囚人Bが「自白」なら

囚人B ＼ 囚人A	黙秘		自白	
黙秘	A：１年	B：１年	A：10年	B：0年
自白	A：0年	B：10年	A：5年	B：5年

囚人Aは「自白」すべき

（図 3.8）

いずれの場合も自白した方が得なので、**合理的に判断すると A は自白を選択するべき**であることがわかります。**B も同じように合理的に判断するなら、やはり自白を選択するはず**ですから、**結局２人とも懲役５年**になります（次ページ（図 3.9）参照）。

なお、この例における「自白」のように、**相手の戦略（選択）を問わず常に有利になるような戦略**のことを**支配戦略（dominant strategy）**といいます。

ゲーム理論は、利得行列をもとに何が支配戦略であるかを考えるところから始まります。

【ゲーム理論の基本】

利得行列をつくり、支配戦略を考える

注記　ただし、ゲームの構造によっては相手の戦略次第で自分が有利になる戦略が変わってしまうこともあります。このようなケースでは「支配戦略」はありません。支配戦略が存在しない「ゲーム」の攻略について興味がある方は、巻末の「参考文献」をご覧ください。

利得行列によって、それぞれの立場における合理的選択（支配戦略）が何であるかということと、起こり得る結果がわかります。

囚人Bの合理的選択

囚人B ＼ 囚人A	黙秘		自白	
黙秘	A: 1 年	B: 1 年	A: 10年	B: 0年
自白	A: 0年	B: 10年	A: 5年	B: 5年

ベター

囚人Aの合理的選択

合理的選択の結果

（図 3.9）

ただし、これでよかったよかった…とはならないのが囚人のジレンマのジレンマたる所以です。上の表で **2 人とも黙秘をした場合**を見てください。どうなりますか？　**2 人とも懲役 1 年**ですね。なんと！ 2 人が「合理的な選択」であるはずの「自白」を選ぶよりも非合理的な選択である「黙秘」を選んだ方が、結果は 2 人にとってより良い結果になります。これが**囚人のジレンマ**です。

「囚人のジレンマ」を、一般化しておきましょう。**囚人のジレンマが生じるのは、相手が協力する（黙秘する）場合も、裏切る（自白する）場合も、自分は裏切る方が得になる（裏切ることが支配戦略）という利害関係があるとき**です。

このような場合、起こり得る 4 つのパターンを自分にとって都合の良い順に並べて、点数をつけると次の通り。

最も良い：相手は協力、自分は裏切り→ 10 点
良い：相手も協力、自分も協力→ 5 点
悪い：相手は裏切り、自分も裏切り→ − 5 点
最も悪い：相手は裏切り、自分は協力→ − 10 点

注記　読者の中には「いやいや、お互いに協力し合うのが『最も良い』だろう」という心の美しい方もいらっしゃると思いますが、ゲーム理論においては、**プレイヤーは（哀しいかな）利己的でかつ合理的である、という前提**になっています。
また点数は、「2 点、1 点、 − 1 点、 − 2 点」や「4 点、3 点、2 点、1 点」のようにつけても構いません。

「自分」を A、「相手」を B にすると、B が協力の場合、A は協力より裏切りの方が得（5 点→ 10 点）。また B が裏切りの場合も、A は協力より裏切りの方が得（− 10 点→ − 5 点）ですね。

すなわち、**A の合理的な選択はいかなる場合も「裏切り」**です。

もちろん、**B にとっての合理的な選択も同様に「裏切り」**です。

しかし、結果は両者にとって「悪い」の状態である「ともに裏切り」になってしまいます。両者がともに合理的な選択をしているのにも関わらず、両者にとっての「良い」である「ともに協力」という結果を得られません。このような「囚人のジレンマ」にあてはまる例は、値下げ合戦、秩序問題、環境問題…などたくさんあります。

囚人のジレンマは、**「個々人が合理的な判断に基づいて行動すれば、社会全体はうまくいくはず」という社会通念を覆す**ものです。これは経済学や社会学、哲学などに非常に大きな影響を与えました。

【囚人のジレンマ】

合理的選択が、よりよい結果に繋がらない

Bの合理的選択

A ＼ B	協力	裏切り
協力	ベター A: 5　B: 5	A:−10　B: 10
裏切り	A: 10　B:−10	A:−5　B:−5 合理的選択の結果

Aの合理的選択

（図 3.10）

例題 3 − 3

義理チョコの慣習がなくならない理由をゲーム理論で説明しなさい。

解答例・解説

職場に A 子さんと B 美さんがいるとします。「義理チョコ」についてはお互いに次のように思っています。

注記 義理チョコの場合は「あげる」が「裏切り」、「あげない」が「協力」と考えます。

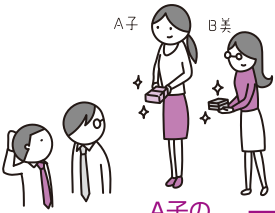
「最も良い」は「自分はあげる、相手はあげない」のケース。
なぜなら自分だけがよく気のつく子、という評価を得られるから。
これが **10 点**。
「良い」は「自分はあげない、相手もあげない」のケース。
なぜなら相手との評価の差は生まれずに余計な出費も抑えられるから。
これは **5 点**。
「悪い」は「自分はあげる、相手もあげる」のケース。
なぜなら相手との評価の差は生まれないものの、出費は抑えられないから。
これは **− 5 点**。
「最も悪い」は「自分はあげない、相手はあげる」のケース。
なぜなら相手だけがよく気のつく子、という評価を得るから。これは **− 10 点**。

注記 このように書くと、なんだかとても性格が悪い子どうしのようですが、先ほども書きましたようにゲーム理論は「プレイヤーは利己的かつ合理的である」が前提になっています…（・_・;)

以上を**利得行列（表）**にすると次ページ（図 3.11）の通り。これは典型的な「囚人のジレンマ」のケースで、**A 子も B 美も合理的選択をする（支配戦**

略を選ぶ）と「あげる」を選択せざるを得ないことがわかります。

よって義理チョコの慣習をなくすのは難しいのです。



B美の合理的選択

B美 ＼ A子	あげない		あげる	
あげない	A子：5	B美：5	A子：−10	B美：10
あげる	A子：10	B美：−10	A子：−5	B美：−5

A子の合理的選択

合理的選択の結果

（図 3.11）

囚人のジレンマを解消する方法

ここまでを読んでくれた読者の方は

「囚人のジレンマについてはわかったけれど、結局どうしようもないんでしょ？」

と読んで損をしたような気分になってしまったかもしれませんね。でも大丈夫です！ゲーム理論は「囚人のジレンマ」を解消する方法もちゃんと教えてくれます。

囚人のジレンマを解消する方法、それは「事前に協定を結ぶ」ことです。

先の囚人 A と囚人 B の例では、お互いが

「おい、もし捕まっても絶対に口を割るんじゃねえぞ。もし裏切ったら（自白したら）、あとで大変ことになるからな」

と捕まる前に話し合って（脅し合って）おけば、2 人が自白をする可能性は低くなるでしょう。そうすればともに「黙秘」となり、2 人はより良い結果を手にしやすくなります。

また、例題の「義理チョコ問題」においても A 子と B 美が

「もし、抜け駆けしてチョコをあげたりしたら、ランチを 1 ヶ月間おごってもらうわよ」

と事前に約束しておけばいいのです。すると義理チョコを「あげる」という選

択肢にはチョコの出費に加えてランチ１ヶ月分の出費が加わることになります。職場で「よく気のつく子」という評価を得るためだけにそんな代償を払おうとする人はいないでしょう。**事前の約束のせいで義理チョコを「あげる」ことは割りに合わなくなりますからＡ子もＢ美も「あげない」を選ぶはず**です。結局、ともに「あげない」になり、２人はより良い結果を得るでしょう。

ポイントは協定により被（こうむ）る「損失」を、裏切りによる「得」よりも大きくしておくことです。

例えば

「義理チョコあげたら、デコピン１回よ♪」

では、「デコピン１回ぐらいならいいか（^_^;)」と思われてしまうかもしれません。「デコピン１回」という「損失」は「（義理チョコをあげることによる）職場での良い評価」という「得」に比べて、小さすぎるので、協定の意味をなさないのです。

あなたが関わる利害関係の中に「囚人のジレンマ」の構造を見抜いたときは、積極的に「協定（約束）」を結ぶようにしましょう。そうすればあなたにとっても相手方にとってもより良い結果を手に入れられる可能性はぐっと高まります。

【囚人のジレンマを解消する方法】

事前に、裏切った場合は
「得」よりも大きな「損失」を被る
という協定を結んでおく

交互ゲームについて

ここまで紹介してきた「囚人のジレンマ」は自分と相手が同時に（お互いの戦略はわからずに）戦略を選択する「ゲーム」でした。このようなゲームを**「同時ゲーム（simultaneous game）」**といいます。

一方、将棋やオセロのように交互に（お互いの戦略を知った上で）戦略を選択する場合もあります。こちらは**「交互ゲーム（sequential game）」**といいます。

交互ゲームの典型例として次のようなケースを考えてみましょう。

ある街にＡとＢの２つの文房具店があります。現状の年間収益は、Ａ店が1,000万円、Ｂ店が500万円です。

今、Ａ店の店主は店の改装を検討しています。

ただし、自分の店だけが改装をした場合は相手の顧客を奪って改装費用を上回る利益をあげることができますが、両方の店が改装をした場合は改装費用が利益を上回ってしまい両店とも減益になることがわかっています。具体的には次の表の通りです。

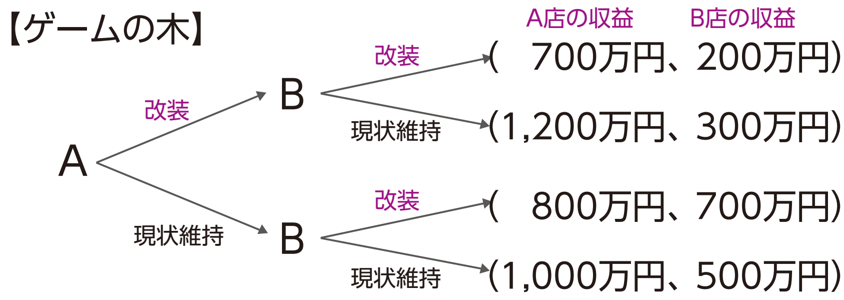
A店	B店	収益		
改装	改装	A店:　700万円	B店:200万円	改装費用がかさんで両店ともに減益
改装	現状維持	A店:1,200万円	B店:300万円	A店の収益アップ(B店の顧客を奪う)
現状維持	改装	A店:　800万円	B店:700万円	B店の収益アップ(A店の顧客を奪う)
現状維持	現状維持	A店:1,000万円	B店:500万円	現状維持

（図3.12）

さて、**Ａ店は改装をすべきでしょうか？**　実はこのケース、同時ゲームのときのような表（利得行列）を作って考えようとすると、両者の合理的選択の結果が１つに定まりません（余力のある方は是非やってみてください）。

そこで次のように、**考えられるすべてのケースを時系列に沿って（起こる順に）書いていきます。そして、最後にそれぞれのプレイヤーの利得を書きます。**

これを**「ゲームの木（game tree)」**といいます。



（図 3.13）

次に、**後手の立場から「実際に起こり得る結果」を考えていきます**（上のケースでは後手はＢ店）。Ａ店が改装した場合、**Ｂ店は現状維持の方が合理的**です（収益が 200 万円→ 300 万円）。またＡ店が現状維持の場合、**Ｂ店は改装すべき**です（収益が 500 万円→ 700 万円）。

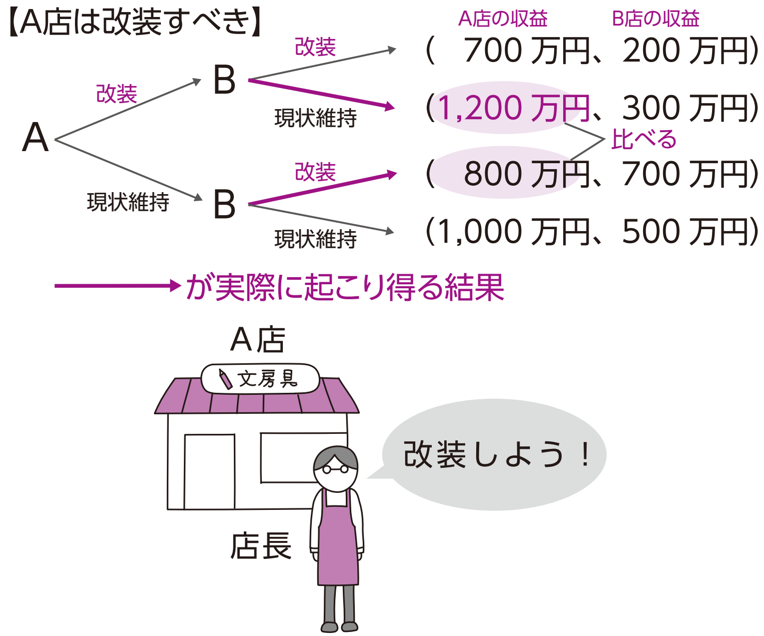
ゲーム理論ではプレイヤーは合理的であるという前提に立っていますので、考えられる４つのケースのうち、実際に起こり得るのは次のいずれかです。

こちらの方が得!

A店	B店	収益	
改装	現状維持	A店:1,200万円	B店:300万円
現状維持	改装	A店:　800万円	B店:700万円

（図 3.14）

これを見ると**Ａ店は改装をした方がよい**ことがわかります。（収益が 800 万円→ 1,200 万円）。



（図 3.15）

交互ゲームを先手が攻略するポイントは、**まず後手の立場で考えて、起こり得る結果を限定し、次にその結果を比べて先手が取るべき戦略を定める**ことです。いわゆる「先読み」ですが、ゲーム理論ではこのように考える思考法を**バックワードインダクション（backward induction）といいます。**

ある利害関係が交互ゲームになっていることを見抜いたら、バックワードインダクションによって戦略を考えるのが定石です。

【交互ゲームの攻略法（先手）】

①　「ゲームの木」を作成

②　後手の立場から起こり得る結果を限定

③　②の結果を比べて先手の得が多い方を選択

例題 3 − 4

次のルールで「石取りゲーム」をします。

・最初の石の数は全部で５コ

・１ 回に取れる石は最大３コまで

・最後に残った１コの石を取った方が敗け

さて、A、B がこの順でこのゲームをしたとき、A は最初に何個取ればよいか（必勝法）を考えなさい。

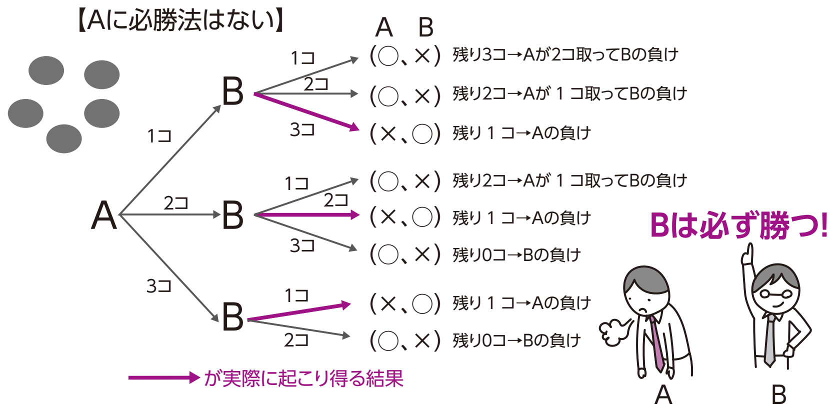
解　答

A に必勝法はない（最初に何個取っても必ず敗ける）。

解　説

意地悪な問題でごめんなさい m(_ _)m

交互ゲームなので「ゲームの木」を作って考えます。



（図 3.16）

前ページのゲームの木からわかるように、A が取る石の数によらず **B には必ず勝つ選択があります**。つまり A が何個取ったとしても、実際に起こり得る結果はすべて「B の勝ち」です。よって **A に必勝法はありません。**

ちなみにこの結果は、石の数がもっと増えた場合でも、**最大 3 コまでの石が取れる「石取りゲーム」では、最後に 5 コを残された方が必ず敗ける**ことを示唆しています。

これをもとにもっと石の数が多い場合の「石取りゲーム必勝法」を考えてみましょう。前ページと同様に考えると相手に 9 コを残せば、必ず残りが 5 コの状況を作ることができます

注記　残りが 9 コになれば…

相手が 1 コ→自分は 3 コで残 5 コ
相手が 2 コ→自分は 2 コで残 5 コ
相手が 3 コ→自分は 1 コで残 5 コ

同じく相手に 13 コを残せば、残りが 9 コの状況を必ず作ることができます。

【最初の石の数が 16 コの場合】

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

【最初の石の数が 21 コの場合】

21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

■ の石を取らされた方が敗け

（図 3.17）

上の図からもわかるように、最初の石の数が 16 コの場合は先手が必勝、21 コの場合は後手が必勝です。相手もこの必勝法を知っている場合は最初の石の数によって勝つ方が決まってしまいます。でも相手がこの必勝法を知らない場合は、ゲームの途中で残りの石の数が

1,5,9,13,17,21,25,29,33…（← 4 で割って 1 余る数）コの状況を作ることができれば必ず勝てます。

余興に試してみてはいかがでしょうか？（^_-）- ☆