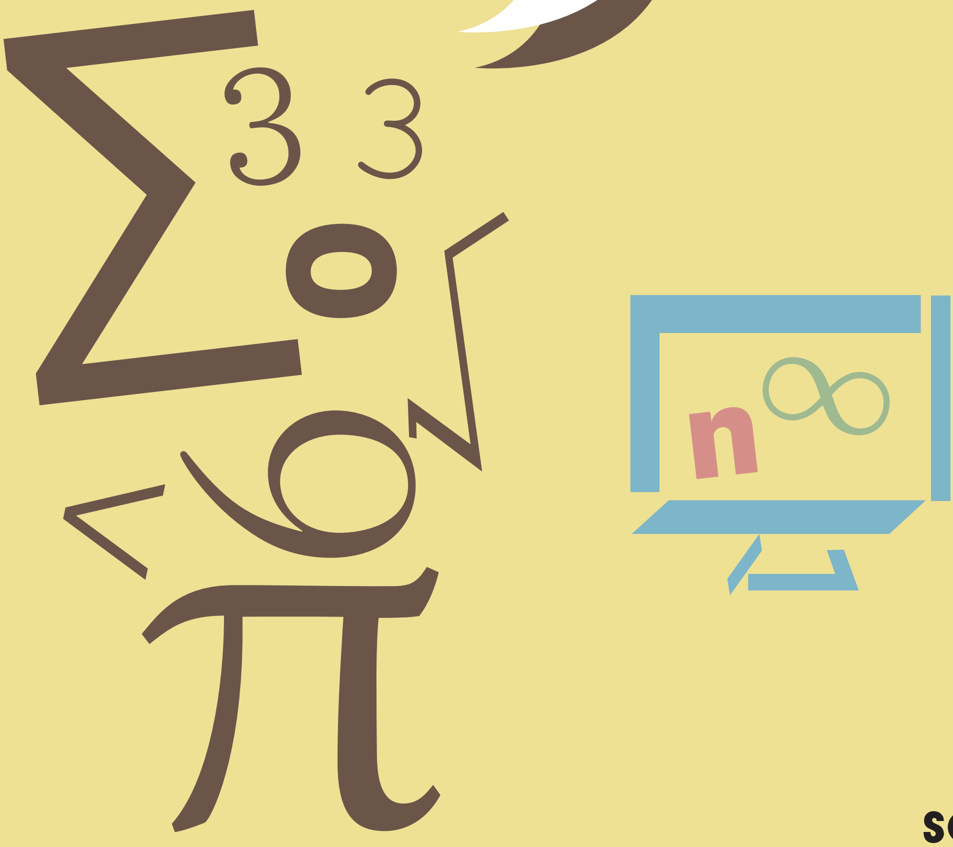
コンピュータ数学

新装版



SCC

コンピュータ数学 新装版

SCC

はじめに

現代は高度情報化社会，IT 社会，そして ICT 社会と呼ばれています。パソコンをはじめコンピュータにかかわりのある仕事に従事する方々はもとより，この“社会”に生き，この“社会”の中でさまざまな仕事に従事する方々や勉学等に励まれる方々にとって，「数学的思考（数理的な物の見方や考え方)」を身につけることも，きわめて重要です。

本書は，数学を学問的に探求するための参考書というよりは，「情報処理」を理解する上で，最小限必要な数学的および統計的分析力を身につけるための基礎理論を，初等・中等的な数学の中から集約し，テキストとして編集したものです。同時に，一般教養の１つとして，忘れかけた基礎的数学をもう一度，基礎からおさらいできるようにも配慮しています。

したがって，全体構成・配列も，中学・高校レベルの基礎的数学を用いて，学習者の復習の意味も兼ね，わかりやすく解説しています。

もとより「情報処理」には，コンピュータ処理技術が不可欠ですが，その前提として，与えられた諸問題に対する分析力と体系化技術が必要となります。

本書は，そのための準備段階として基礎的数学を選び，各章の冒頭では，その応用分野の紹介にも意をそそぎました。したがって，テキストとして編集されてはいますが，忘れかけた数学を思い出し，応用分野にも慣れ親しめるよう，独習者向けの参考書としても利用できるようにしています。

また，各章ともに「練習問題」を掲載していますので，各章ごとに習得度の確認ができます。また，巻末には「付録」として，数学公式集や正規分布表などを掲載していますので，必要のつど活用いただけます。

本書によって，「物の見方」や「考え方」に，「数学的思考」が自然に働くようになれば幸いです。

編　者

目　次

はじめに

第１章　記 号 化 …… 1
1.1　定数・変数を表す記号 …… 2
1.2　いろいろな記号 …… 3
1.2.1　基本的な記号 …… 3
1.2.2　集合で使用する記号 …… 8
【練習問題】 …… 9

第２章　集　合 …… 11
2.1　集合とは …… 12
2.2　部分集合，全体集合，補集合 …… 13
2.2.1　部分集合 …… 13
2.2.2　全体集合，補集合 …… 14
2.3　集合の演算 …… 16
2.3.1　結　び …… 16
2.3.2　交わり …… 18
2.4　ド・モルガンの法則 …… 20
2.5　命題と論理 …… 22
2.5.1　命　題 …… 22
2.5.2　命題の合成 …… 22
2.5.3　ド・モルガンの法則 …… 22
2.5.4　真理値表 …… 23
【練習問題】 …… 24

第３章　ベクトルと行列・行列式 ･･････････････････････････ 27
3.1　ベクトル ･･････････････････････････ 27
3.1.1　ベクトルとは ･･････････････････････････ 27
3.1.2　加法，減法 ･･････････････････････････ 29
3.1.3　スカラ倍 ･･････････････････････････ 31
3.1.4　乗　法 ･･････････････････････････ 32
3.2　行　列 ･･････････････････････････ 34
3.2.1　行列とは ･･････････････････････････ 34
3.2.2　加法，減法 ･･････････････････････････ 36
3.2.3　スカラ倍 ･･････････････････････････ 38
3.2.4　乗　法 ･･････････････････････････ 39
3.2.5　正方行列と単位行列 ･･････････････････････････ 43
3.3　行列式 ･･････････････････････････ 45
3.3.1　行列式と連立１次方程式 ･･････････････････････････ 45
3.3.2　行列式の計算 ･･････････････････････････ 46
3.3.3　連立１次方程式の解き方 ･･････････････････････････ 50
3.3.4　逆行列 ･･････････････････････････ 55
3.3.5　逆行列の応用 ･･････････････････････････ 57
【練習問題】 ･･････････････････････････ 59

第４章　順列・組合せ ･･････････････････････････ 65
4.1　順　列 ･･････････････････････････ 66
4.1.1　辞書式並べ方 ･･････････････････････････ 66
4.1.2　和法則と積法則 ･･････････････････････････ 66
4.1.3　n！ ･･････････････････････････ 68
4.1.4　nPr ･･････････････････････････ 69
4.1.5　重複順列 ･･････････････････････････ 71
4.2　組合せ ･･････････････････････････ 72
4.2.1　nCr ･･････････････････････････ 72
4.2.2　nCr の性質 ･･････････････････････････ 73
4.2.3　二項定理 ･･････････････････････････ 74
4.2.4　パスカルの三角形 ･･････････････････････････ 75
【練習問題】 ･･････････････････････････ 76

第5章 確 率 ······ 79
5.1 確 率 ······ 80
5.1.1 試行と事象 ······ 80
5.1.2 確率とは ······ 81
5.2 確率の計算 ······ 83
5.2.1 確率の基本性質 ······ 83
5.2.2 条件つき確率 ······ 86
5.2.3 事象の従属・独立 ······ 88
5.3 期待値 ······ 91
【練習問題】 ······ 93

第6章 統 計 ······ 97
6.1 統計とは ······ 97
6.2 代表値 ······ 98
6.2.1 度数分布表 ······ 98
6.2.2 代表値 ······ 99
6.2.3 散布度 ······ 101
6.3 ばらつきの法則 ······ 106
6.3.1 正規分布 ······ 106
6.3.2 二項分布 ······ 110
6.3.3 ポアソン分布 ······ 112
6.4 推 定 ······ 114
6.5 検 定 ······ 119
6.6 相関と最小二乗法 ······ 121
6.6.1 相関係数 ······ 121
6.6.2 最小二乗法 ······ 123
【練習問題】 ······ 128

第7章　微　分 ···· 135
7.1　なぜ微分が必要か ···· 135
7.1.1　速度とは何か ···· 135
7.1.2　時々刻々変化する速度 ···· 136
7.2　微分の原理 ···· 138
7.2.1　極限と数列の和 ···· 138
7.2.2　微分の考え方 ···· 147
7.2.3　任意の時点での速度 ···· 149
7.2.4　微分を使って ···· 151
7.2.5　さまざまな関数の微分 ···· 152
【練習問題】 ···· 153

第8章　積　分 ···· 155
8.1　なぜ積分が必要か ···· 155
8.1.1　三角形の面積を求める ···· 155
8.1.2　放物線で囲まれた面積 ···· 155
8.2　面積と積分の原理 ···· 156
8.2.1　三角形の面積を求めるもう1つの方法 ···· 156
8.2.2　放物線で囲まれた面積を求める ···· 158
8.3　面積を求める一般的な方法（定積分） ···· 159
8.3.1　任意の範囲の面積を求める（1次関数） ···· 159
8.3.2　任意の範囲の面積を求める（放物線） ···· 161
8.4　より一般的な積分（不定積分） ···· 163
8.5　微分と積分の関係 ···· 165
【練習問題】 ···· 167

付　録 ･･････ 169
付録 1　数学公式集 ･･････ 169
付録 2　ギリシア文字 ･･････ 185
付録 3　ローマ数字とアラビア数字の対比 ･･････ 186
付録 4　正規分布表 ･･････ 187

別冊　練習問題解答

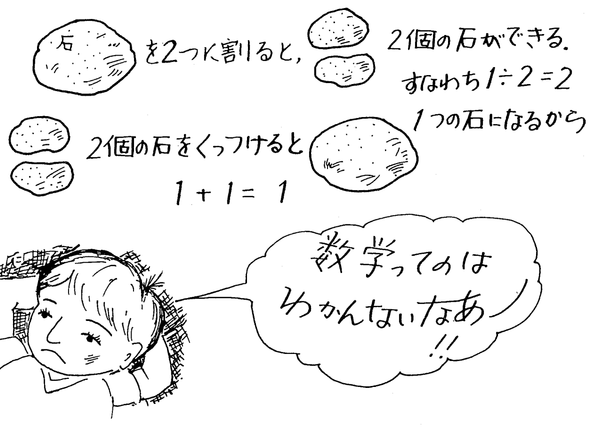
コンピュータ数学

新装版

第1章　記号化

私たちは，今まで算数・数学の時間に，いろいろな記号を習い使ってきたが，あまりにも多くの記号を習ったために，数学がきらいになった人も多いのではないだろうか。数学はむずかしい！　Σとかsin，cosなど，わけがわからないという人も多いだろう。

この章では，コンピュータ技術に必要な数学を学ぶにあたって，今までに学習したもののなかから，このぐらいは知っておいた方がよいもの，この後の学習のために復習しておいてほしいものを整理した。



1.1　定数・変数を表す記号

記号の中で，最も古くから使われているのは，１，２，３，………というアラビア数字である。この記号は，私たちが幼いころから聞きなれ，使ってきたものである。

次に，数を表すのに文字を用いるようになった。

昔，既知の数（定数）と，未知の数（変数）を表すのに，子音，母音によって使い分けていたが，デカルトが次のように使った。

既知の数（定数）を表すにはアルファベットの前の方の文字，

ａ，ｂ，ｃ，……………

を使い，未知の数（変数）を表すには，アルファベットの後の方の文字，

x，y，z

を使う。これが今日まで続いている。

＜例＞　正比例の一般式

$$y = ax$$

１次式の一般式

$$y = ax + b$$

因数分解の公式

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

1.2　いろいろな記号

1.2.1　基本的な記号

(1)　四則演算の記号

i)　加算（足し算）記号　（＋）

ii)　減算（引き算）記号　（－）

iii)　乗算（掛け算）記号　（×）

iv)　除算（割り算）記号　（÷）

(2)　等　号（＝）

右辺と左辺が等しい　$2+3=5$

右辺と左辺が等しくないときの記号は，≠を用いる　$2+4 \neq 5$

(3)　不等号（＞，＜，≧，≦）

aはbより大きい	$a > b$
aはbより大きいかまたは等しい	$a \geqq b$
cはdより小さい	$c < d$
cはdより小さいかまたは等しい	$c \leqq d$

(4)　分　数

1個のりんごを2人で等分すると，1人分は$\frac{1}{2}$個となる。2mの布を3人で等分すると，1人分は$\frac{2}{3}m$となる。$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$といった数を**分数**という。

分数には，分母と分子に同じ数を掛けても，同じ数で割っても，値は変わらないという性質があるので，分数は分母と分子に同じ数を掛けたり，割ったりすることにより，通分し簡単にすることができる。

たとえば，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$となる。

$\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}$ のような分数を**繁分数**という。

繁分数を簡単な分数にするには分母と分子に同じ数を掛け，加算などを繰り返しながら計算する。

たとえば，繁分数 $\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{4+\frac{1}{4}}}$ を簡単にする手順を次に示す。

i)　繁分数の分母にある $\dfrac{1}{4+\frac{1}{4}}$ という分数の分母と分子に，4を掛ける。

ii)　$\dfrac{4}{16+1}$ となり，$\dfrac{4}{17}$ となる。

iii)　繁分数は $\dfrac{1}{4+\frac{4}{17}}$ となったので，この分数の分母と分子に，17を掛ける。

iv)　$\dfrac{17}{68+4}$ となり，答えは $\dfrac{17}{72}$ となる。

(5)　指　数

1辺の長さaの立方体の体積を求めると，$a \times a \times a = a^3$ となる。

aを3個掛けることを，aの3乗といい a^3 と書く。

n が正の整数のとき，n 個のaの積をaの n 乗といい，a^n と書く。n を a^n の**指数**という。

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^0 = 1$$

＜例＞　$a^3 \times a^2 = \underbrace{a \times a \times a}_{a^3} \times \underbrace{a \times a}_{a^2} = a^5$　　$a^4 \div a^3 = \dfrac{a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a$

(6)　累乗根

面積がb㎠の正方形の1辺の長さ，つまり2乗するとbになる数を，bの**平方根**（2乗根）といい，$\sqrt{b}$ と書く。$\sqrt{b}$ は「ルートb」または「bの平方根」と読む。よって1辺の長さは，$\sqrt{b}$ cmである。3の平方根は $\sqrt{3}$ と $-\sqrt{3}$ である。これは $\pm\sqrt{3}$ とも書く。

体積がc㎤の立方体の1辺の長さ，つまり3乗するとcになる数を，cの**立方根**（3乗根）といい，$\sqrt[3]{c}$ と書く。よって1辺の長さは，$\sqrt[3]{c}$ cmである。

＜例＞　$\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3} = 3$

$$\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[3]{3}$$

$$= 3 \times \sqrt[3]{3^{2+1}} = 9$$

n 乗してaとなる数をaの ***n* 乗根**といい，$\sqrt[n]{a}$ と書く。$\sqrt[n]{a}$ は $a^{\frac{1}{n}}$ とも書く。

例)　$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 3^{\frac{3+2+1}{6}}$

$$= 3$$

(7)　対　数（log）

aを何乗するとbになるか。それを対数を用いて表すと，$\log_a b$となる（ただし$a>0$，$a\neq 1$，$b>0$）。そして，aを底，bを真数という。

とくに，底が10のものを常用対数といい，通常10は省略する。

$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$である。

＜例＞　$\log_2 2=1$

$$\log_2 8=\log_2 2^3=3\log_2 2=3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9=2\log_{\frac{1}{3}} 3=2\frac{\log_3 3}{\log_3 \frac{1}{3}}=2\frac{\log_3 3}{\log_3 3^{-1}}=2\frac{1}{-1}=-2$$

(8)　指数と対数

$a^x=y \iff x=\log_a y$（$a>0$，$a\neq 1$，$y>0$）という関係が成立する。

$2^x=64 \iff x=\log_2 64=\log_2 2^6=6$

＜例題1.1＞

3^7は何桁の数か。また$\frac{1}{3^7}$は小数第何位ではじめて0でない数字が現れるか（$\log 3=0.4771$）。

〔**解　説**〕

10進数の桁数は，10を底とする対数をとることで求められる。3^7がx桁だとすれば，

$$10^{x-1}\leqq 3^7<10^x$$

と書けるので，各辺の対数をとる。

$$(x-1)\log 10\leqq 7\log 3<x\log 10$$

$$x-1\leqq 7\times 0.4771<x$$

$$x-1\leqq 3.3397<x$$

ここではxが整数であるから，$x=4$となり，3^7は4桁の数である。

$$10^3\leqq 3^7=2187<10^4$$

$$\log\frac{1}{3^7}=-7\log 3=-7\times 0.4771=-3.3397$$

-3.3397よりも小さい最大の整数は-4である。よって小数第4位である。

(9)　円周率（π）

円周の長さや，円の面積を求めるために使う**円周率**は3.14159265……という小数になる。この数はどこまでも限りのない数である。この数をπという文字記号で表す。

半径r cmの円周の長さと円の面積は，$2\pi r$ cm，πr^2cm²で表される。

(10)　絶対値

＋2，－8などで，符号を考えず，2や8だけに注目して考えることがある。2を＋2の**絶対値**といい，｜｜の符号を用いる。

＜例＞　$|-8|=8$

$|x|=2$ならば，$x=+2$または，$x=-2$である。

(11)　数列の和（Σ）

$1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n$を，$\sum_{k=1}^{n}k$と表す。

$\sum_{k=1}^{5}k$とはkに順次1，2，3，4，5を代入したものの和である。

＜例＞　$\sum_{k=1}^{n}2^k=2+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots\cdots\cdots+2^n$

(12)　極限値

数列で1，2，3，………n，………というように，ある決められた項の数でなく，無限に続く数列を**無限数列**という。第n項をa_nとすると，a_nを無限数列の一般項という。

nを限りなく大きくするとき，a_nが一定の値Aに限りなく近づくならば，この数列はAに収束するという。このとき，Aを数列の**極限値**といい，次のように書く。

$\lim_{n\to\infty}a_n=A$　（記号∞は無限大と読む）

＜例＞　数列　1，2，3，………，n，…………では，$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$

数列　-2，-2^2，-2^3，……，-2^n ……では，$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$

数列　0.1，0.01，0.001，…………………では，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

数列　1，－1，1，－1，………，$(-1)^{n+1}$，……では，振動するといい，極限値がない。

⒀　階　乗（！）

5×4×3×2×1といったように，1からある数（この場合は5）までの数の積を**5！**と書き，5の階乗と読む。0の階乗（0！）は1と定める。

＜例＞　$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots\cdots\cdots \times 2 \times 1$$

⒁　順　列（P：Permutation）

異なるn個のものから任意にr個とり，1列に並べたものを**順列**といい，その総数を$_n\mathrm{P}_r$と書く。$_n\mathrm{P}_r$は，

$$_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$——nから順にr個掛ける

によって計算される。階乗を使って書くと，次のようになる。

$$_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

＜例＞

$$_8\mathrm{P}_2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 8 \times 7 = 56$$

$$_5\mathrm{P}_5 = \frac{5!}{(5-5)!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

⒂　組合せ（C：Combination）

異なるn個のものから任意にr個を取り出したものを**組合せ**といい，その総数を$_n\mathrm{C}_r$と書く。$_n\mathrm{C}_r$は，

$$_n\mathrm{C}_r = \frac{n(n-1)\cdots\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2 \times 1}$$

——nから順にr個掛ける
——rから順に1まで掛ける

によって計算される。階乗を使って書くと，次のようになる。

$$_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

＜例＞

$$_8\mathrm{C}_5 = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

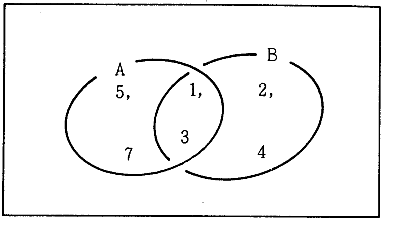
$$_9\mathrm{C}_2 = \frac{9!}{2!\,7!} = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

1.2.2　集合で使用する記号

次のような5つの数の集合で考える。

A＝{1，3，5，7}　　B＝{1，2，3，4}　　C＝{1，3，5}

D＝{2，4}　　E＝{1，3，5，7}



(1)　集合AとBの結び（∪）

A∪B＝｛1，2，3，4，5，7｝

(2)　集合AとBの交わり（∩）

A∩B＝｛1，3｝

(3)　集合Aの要素である（∈または∋）

1∈A（またはA∋1）

(4)　集合Aの要素でない（∉または∌）

2∉A（またはA∌2）

(5)　集合Cは集合Aの真部分集合である（⊂または⊃）

C⊂A（またはA⊃C）

(6)　集合Aと集合Eが等しい（＝）

A＝E

(7)　A⊂EかA＝Eのとき，集合Aは集合Eの部分集合である（⊆または⊇）

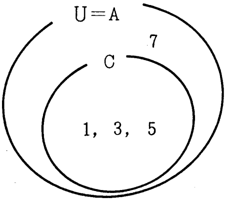
A⊆E（またはE⊇A）

(8)　集合AとDの交わりは空集合である（ϕ）

A∩D＝ϕ

(9)　全体集合（U）

(10)　U＝Aのとき，Cの補集合　$\overline{\mathrm{C}}$＝{7}



【練習問題】

練習1. 1

次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}$

(2) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{2}}}$

(3) $2^{\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{3}{5}}$

(4) $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$

(5) $\sqrt{7} \times \sqrt[3]{7} \times \sqrt[6]{7}$

(6) $|-7| + |5| + |-3|$

(7) $\log_2 64$

(8) $\log_2 256$

(9) $\sum_{k=1}^{5} 2^k$

(10) ${}_4P_3$

(11) ${}_{13}C_{12} \times {}_7C_5$

(12) $3^4 \times 3^7 \div 9 \times 6 \div 2$

練習1. 2

次の値は何桁の数か。ただし$\log 2 = 0.301$である。

(1) 2^{16}

(2) 2^{50}

Memorandum

第2章 集 合

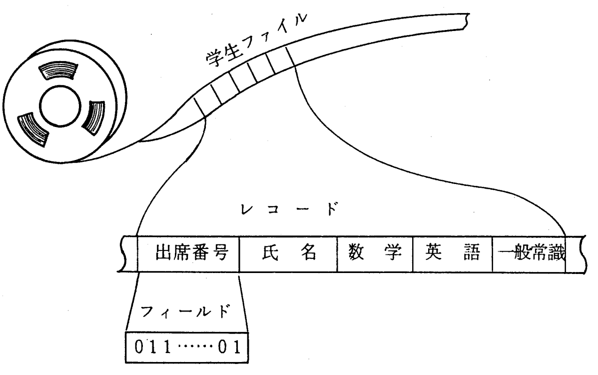
コンピュータにとって“集合”という概念は，非常に重要な意味をもっている。たとえば，コンピュータでよく使われる言葉に，ファイル，レコード，フィールドがある。

フィールドはレコードを形成し，レコードはファイルを形成するといったようにそれぞれが部分集合の形として把握することができる。

また，プログラム作成においても，「もしも何々ならば何々」とか，「何々でありかつ何々，または何々」というように和集合，積集合に相当するような論理的判断も使われているのである。

このように，集合の概念は，コンピュータを学習するにあたってなくてはならないものの1つである。

そこで，以下に集合の概念を学ぶこととする。



2.1 集合とは

集合とは，ひとことでいえば“ものの集まり”のことであるが，数学で取り扱う集合は，その内容がはっきりした集まりでなくてはならない。

たとえば，

背の高い人の集まり

のようなものは，Aさんがそれに属するか属さないかが不明確であるから，こういう場合は，集合としては取り扱わない。

一方，

教室の中にいる人の集まり

のようなものは，Aさんがそれに属するか属さないかは明確であるから“集合”として取り扱うことができる。

このように，属するものがはっきりしている集まりが集合である。集合に属する1つ1つのものを，その集合の**要素**または**元**という。

今，上の集合をAとして，集合の**表示**の定義を行うと，

A＝ $\{x \mid x$ は教室の中にいる人$\}$

となり，仮に5人の人の集まりとしたら，

A＝ {加賀，奥居，梶田，加藤，大矢}

で表す。

なお，通常，集合をA，B，C……要素をa，b，c，……で表すが，aがAの要素であることは

$$a \in A$$

と表し，Aがaを含むことは

$$A \ni a$$

と表す。

また，aがAの要素でないことは

$$a \notin A$$

と表し，Aがaを含まないことは

$$A \not\ni a$$

と表す。

2.2 部分集合，全体集合，補集合

2.2.1 部分集合

2つの集合

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

を考えると，Aの要素はすべてBの要素となっている。

このように，2つの集合AとBがあって，Aの要素はすべてBの要素であるとき，AはBの**部分集合**であるという。AはBに**含まれる，**またはBはAを**含む**といい，

$$A \subseteqq B \quad \text{または} \quad B \supseteqq A$$

と表す。

しかし，この場合2つの集合A，Bについて，Aの要素はすべてBの要素であり，かつAの要素でないものを1つでもBが含んでいたならば，AはBの**真部分集合**といい，

$$A \subset B \quad \text{または} \quad B \supset A$$

と表す。

また，

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$C = \{3, 5, 4, 1, 2\}$$

のような，2つの集合を考えると，Aの要素はすべてCの要素であり，逆にCの要素はすべてAの要素となるから，AとCは同じ集合となり，

$$A = C$$

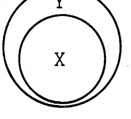
というように表す。

このような集合同士の関係を図示する場合，一般に**ベン図式**（ベン・オイラー図式）が使用される。

たとえば，

$$X \subset Y$$

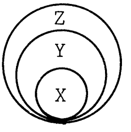
という関係をベン図式で表すと，下のようになる。



また，

$$X \subset Y,\quad Y \subset Z$$

という関係は，下のように表すことができる。



2.2.2　全体集合，補集合

＜例題2.1＞

集合U＝$\{x, y, z\}$ が与えられている。集合Uのすべての部分集合を示せ。

〔解　説〕

(1)　3つの要素を含む部分集合は

$$\{x, y, z\}$$

(2)　2つの要素を含む部分集合は

$$\{x, y\},\ \{x, z\},\ \{y, z\}$$

(3)　1つの要素を含む部分集合は

$$\{x\},\ \{y\},\ \{z\}$$

(4)　1つの要素も含まない部分集合は，通常**空集合**といい，ϕ（ファイ）という記号で表す。

以上から，与えられた集合，

$$U = \{x, y, z\}$$

のすべての部分集合は，

$$\{x, y, z\},\ \{x, y\},\ \{x, z\},\ \{y, z\},\ \{x\},\ \{y\},\ \{z\},\ \phi$$

である。

このように，特定の集合Uを固定しておいて，この集合の種々の部分集合を考える場合，Uを**全体集合**という。また，全体集合Uの中で，その部分集合に属さない要素の集合を部分集合に対する**補集合**といい，$\overline{\ \ }$または^{c}で表す（本テキストでは$\overline{\ \ }$で統一する）。

たとえば，

Uを1桁の自然数の集合とした場合，Uの中で，

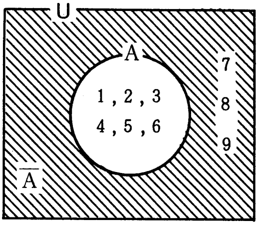
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

の補集合$\overline{A}$を求めると，

$$\overline{A} = \{7, 8, 9\}$$

となる。

また，これをベン図式で表すと，



のように表される。

2. 3 集合の演算

通常，2つの数a，bを加えてa＋bを作り，その結果が1つ求まる。また2つの数a，bを掛けてa×bを作り，その結果が1つ求まる。

これと全く同様に，集合においても以下に示すような方法で演算を定義できる。

2. 3. 1 結 び

全体集合Uの2つの部分集合AとBが与えられた場合，AまたはB（あるいは両方）に属するすべての要素の集合を，AとBの**結び**（join）と呼び，

$$A \cup B$$

で表す。これをA join BまたはA cup Bと呼んでいる。

また，結びを和集合と呼ぶ場合もある。

たとえば，

A，Bが

$A = \{a, b, c, d, e\}$

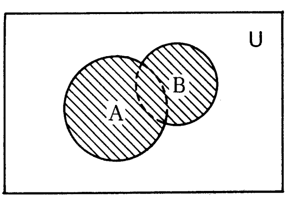
$B = \{d, e, f, g\}$

であれば，$A \cup B$は，

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

となる。

また，ベン図式で表すと，



A ∪ B

となる。

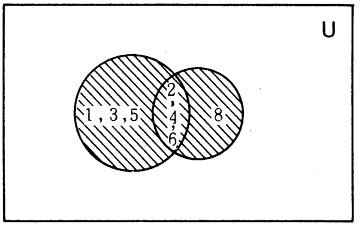
＜例題2. 2＞

A＝{1，2，3，4，5，6}

B＝{2，4，6，8}

の結び，A∪Bを求めよ。

〔解 説〕 A∪B＝{1，2，3，4，5，6，8}



A∪B

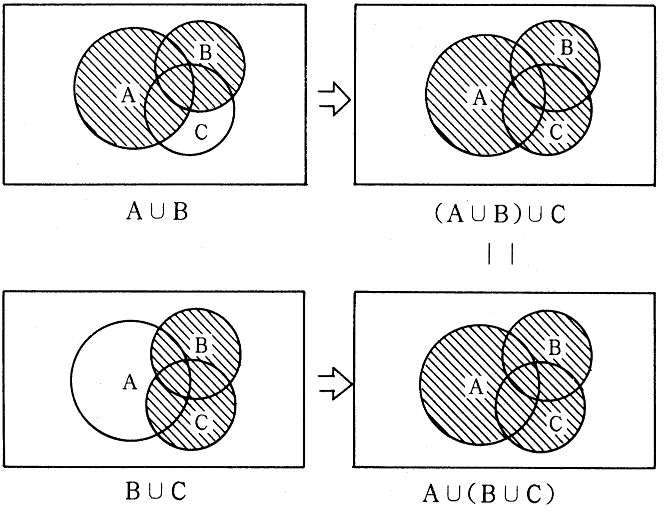
＜例題2. 3＞

3つの集合A，B，Cに対して，次の関係を証明せよ。

(A∪B)∪C＝A∪(B∪C)

〔解 説〕

集合A，B，Cの関係をベン図式で表せば，簡単に証明できる。



2.3.2 交わり

全体集合**U**の２つの部分集合ＡとＢが与えられた場合，ＡとＢの両方に属するすべての要素の集合を，ＡとＢの**交わり**（meet）といい，

$$A \cap B$$

と表す。A meet BまたはA cap Bとも呼んでいる。

なお，交わりを積集合と呼ぶ場合もある。

たとえば，

Ａ，Ｂが

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

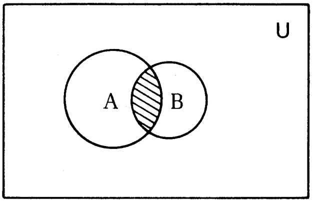
$$B = \{d, e, f, g\}$$

であれば，$A \cap B$は，

$$A \cap B = \{d, e\}$$

となる。

また，ベン図式で表すと，



$A \cap B$

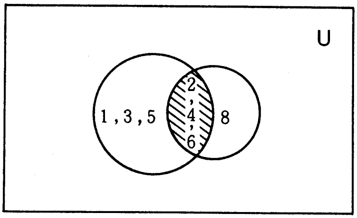
となる。

＜例題2.4＞

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

の交わり（A∩B）を求めよ。

〔解　説〕　$A \cap B = \{2, 4, 6\}$



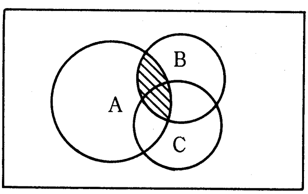
A∩B

＜例題2.5＞

3つの集合A，B，Cに対して，次の関係を証明せよ。

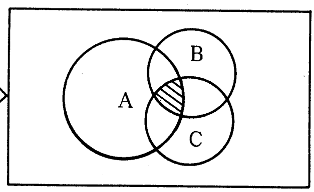
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

〔解　説〕



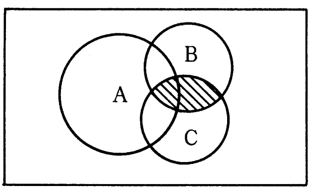
A∩B

⇒



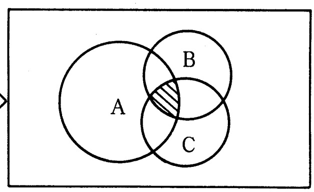
(A∩B)∩C

||



B∩C

⇒



A∩(B∩C)

2.4　ド・モルガンの法則

集合同士の演算について，

$$\cap,\ \cup,\ \overline{}$$

という3種類の記号が理解できた。ところが，この3種類の記号の間には，ある関係が存在する。

それは，

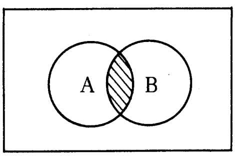
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

のように，AとBをまとめて‾を付ける場合と，AとBとのそれぞれに‾を付ける場合とでは∩と∪とが逆転するという関係が成り立つことである。

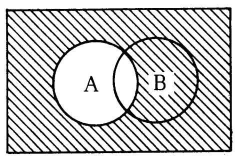
このような関係式を**ド・モルガンの法則**と呼ぶ。

それでは，上の式についてベン図式を用いて証明してみる。

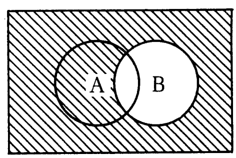
＜$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$の証明＞



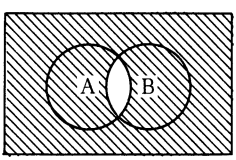
$A \cap B$



$\overline{A}$

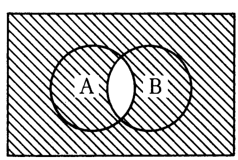


$\overline{B}$



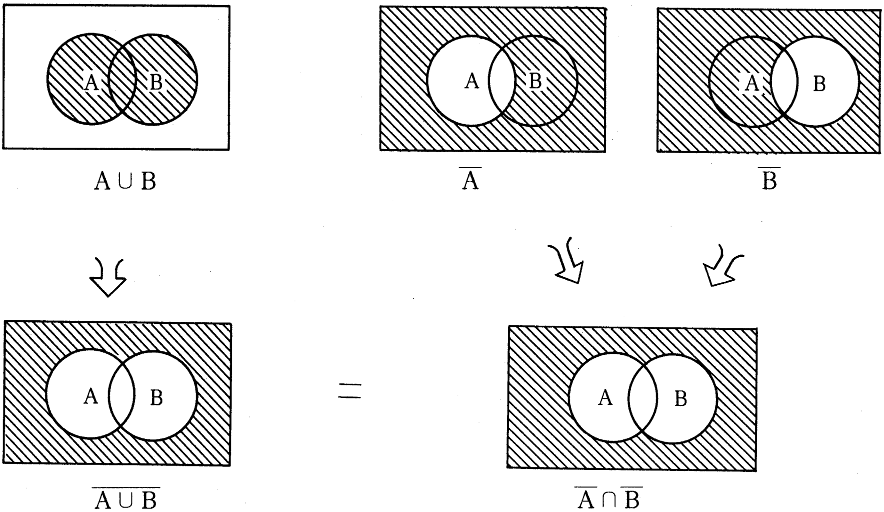
$\overline{A \cap B}$

＝



$\overline{A} \cup \overline{B}$

＜$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$の証明＞



2.5 命題と論理

集合に密接な関係のある命題について，簡潔に説明する。

2.5.1 命題

対象とする事柄について述べたもので，真であるか，偽であるかの判定ができるものを**命題**という。真とはその命題が正しいことであり，偽とはその命題が正しくないことである。また1つの事柄について述べている命題を**基本命題**という。命題は一般に***p***，***q***，***r***……などの文字で表す。

＜例＞ うちのタマは猫である

2.5.2 命題の合成

集合と同様に，命題と命題を組み合わせて複合命題を作成することができる。

(1) 否定 （$\overline{}$） NOT

命題の内容を反対にするもので，「$\overline{}$」で表す。pが真のとき$\overline{p}$は偽となり，pが偽のとき$\overline{p}$は真となる。

＜例＞ $\overline{\text{うちのポチは猫である}}$＝うちのポチは猫でない

(2) 連言 （∧） AND

命題と命題を「**かつ**」で結ぶもので，「∧」で表す。pとqがともに真のときのみ$p \wedge q$は真となり，pまたはqの少なくともいずれか一方が偽のとき$p \wedge q$は偽となる。

＜例＞ 象は鼻が長く∧きりんは首が長い

(3) 選言 （∨） OR

命題と命題を「**または**」で結ぶもので，「∨」で表す。pとqの少なくともいずれかが真であれば$p \vee q$は真となり，pとqがともに偽のときのみ$p \vee q$は偽となる。

＜例＞ TVゲームをする∨読書する

2.5.3 ド・モルガンの法則

集合と同様に，命題p，qについてド・モルガンの法則が成立する。

$$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$$

$$\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$$

2.5.4　真理値表

基本命題の真偽に対応した，複合命題の真偽を表にしたものを**真理値表**という。否定，連言，選言を真理値表にすると表2.1のようになる。ただし，Tは真，Fは偽を意味する。

表2.1　真理値表

		否　定	連　言	選　言
p	q	$\overline{p}$	$p \land q$	$p \lor q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

ド・モルガンの法則は，真理値表によって簡単に証明できる。

表2.2　ド・モルガンの法則

p	q	$p \land q$	$\overline{p \land q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \lor \overline{q}$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

一致する

p	q	$p \lor q$	$\overline{p \lor q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \land \overline{q}$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

一致する

【練習問題】

練習2. 1

次の集合を，要素を用いて表示せよ。

① $A=\{x \mid 0<x<10,\ x$は奇数$\}$

② $A=\{x \mid 0<x<10,\ x$は偶数$\}$

③ $A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$

練習2. 2

次のように集合が定義されているが，どれがどの部分集合か示せ。

$A=\{a, b, c, d, e\}$

$B=\{b, c, d\}$

$C=\{c, d, e, f, g\}$

$D=\{d, e, f\}$

$E=\{e\}$

練習2. 3

集合$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$について，次の部分集合を表示せよ。

① 偶数の集合

② 奇数の集合

③ $1<x<8$なるxの集合

④ 3の倍数の集合

⑤ 3でも7でも割り切れる数の集合

練習2. 4

$A=\{2, 3, 5, 7\}$ のすべての部分集合を示せ。またこれらは，すべてで何個あるか。

練習2. 5

集合$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{2, 4, 6, 8\}$，として次の集合を表示せよ。

① $\overline{A}$ ② $A\cap B$ ③ $A\cup B$ ④ $\overline{A\cap B}$ ⑤ $\overline{A\cup B}$ ⑥ $\overline{B}$

練習2.6

次の集合に対し，$(A \cup B) \cup C$ および $A \cup (B \cup C)$ を求めよ。

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{4, 5, 6, 7\}$

$C = \{3, 4, 5, 8, 9\}$

練習2.7

学生が100人いて英語，フランス語，ドイツ語を選択している。
それぞれ選択した学生を調べたら，次のようであった。

英語	42人	ドイツ語とフランス語	8人
フランス語	30人	ドイツ語と英語	10人
ドイツ語	28人	フランス語と英語	5人
全部選択したもの	3人		

これにもとづいて，次の人数を求めよ。

① 語学を選択していない学生

② 英語だけを選択している学生

③ 英語とフランス語を選択し，ドイツ語を選択していない学生

練習2.8

全体集合Uの部分集合A，B，Cについて，次のことがわかっている。

$n(U)=692$　　$n(A)=300$　　$n(A \cap B)=150$

$n(B)=230$　　$n(B \cap C)=90$

$n(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})=10$　　$n(C)=370$　　$n(C \cap A)=180$

このとき，

① $n(A \cap B \cap C)$　　② $n(\overline{A} \cap B \cap \overline{C})$

③ $n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$　　④ $n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$

を求めよ。

（注）　$n(U)=692$ というのは，Uの要素数を表す場合に用いる。以降の $n(\quad)=\times\times\times$ も同様である。

練習2. 9

次の式を，ベン図式を用いて証明せよ。

① $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

② $A \cup \overline{A} = U$

③ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

④ $A \cap \overline{A} = \phi$

練習2.10

次の関係を，ベン図式を用いて証明せよ。

① $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ………分配法則

② $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ………分配法則

③ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ………分配法則

練習2.11

1000以下の自然数のうち，２の倍数の集合をA，３の倍数の集合をB，５の倍数の集合をCとする。

(1) $A \cap B$，$A \cap C$，$A \cap B \cap C$には，それぞれ何個の数が属するか。

(2) 1000以下の自然数のうち，２の倍数であるが，３の倍数でも５の倍数でないものの個数を求めよ。